

Esame Geometria 3: 20 gennaio 2023
Prof. P.A. Oliverio - Dr. F.G. Infusino

Esercizio 1. Si consideri la curva $\gamma : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}^3$ così definita:

$$\gamma(t) = \left(t^2 + 1, -t + 1, \ln \left(\frac{t}{2} \right) \right)$$

- (1) Determinare la curvatura e la torsione in ogni suo punto. **(4 pt.)**
- (2) Determinare un'equazione cartesiana per il piano osculatore nel punto $\gamma(2)$. **(2 pt.)**

Esercizio 2. Si consideri l'ellisse E contenuta nel piano $y = 0$, di centro $P = (4, 0, 3)$ e semiassi di lunghezza rispettivamente 2 e 1.

- (1) Si fornisca una parametrizzazione per la superficie S ottenuta ruotando attorno all'asse z l'ellisse E . **(2 pt.)**
- (2) Determinare la natura dei punti di S . **(4 pt.)**

Esercizio 3. (1) Determinare la trasformazione lineare fratta f che manda $4i$ in ∞ , 1 in $-\frac{2}{17} + \frac{9i}{17}$ e 0 in $-\frac{1}{4}$. **(2 pt.);**

- (2) Determinare l'immagine tramite f di $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) = 4\}$. **(4 pt.);**

Esercizio 4. Calcolare il valore dei seguenti integrali:

- (1) $\oint_{\gamma(0;1)} \frac{\cos(2z)}{z^5} dz$ **(1 pt.);**
- (2) $\oint_{\gamma(1;8)} z^3 \sin\left(\frac{1}{z+i}\right) dz$; **(1 pt.);**

Trovare inoltre la serie di Laurent centrata in $z = -3i$ della funzione

$$f(z) = \frac{2}{z^2 + 10iz - 21} \quad \text{(2pt.);}$$

Determinare infine poli e zeri in \mathbb{C} , con rispettive molteplicità, ed eventuali singolarità eliminabili della funzione:

$$f(z) := \frac{(\cos(\pi z))^4 \sin(z^3)}{z^3(2z+1)^4(4z^2-9)^5} \quad \text{(2pt.);}$$

Esercizio 5. Risolvere i seguenti esercizi:

- (1) Determinare l'insieme dei punti del piano complesso in cui la funzione

$$f(z) = f(x, y) = (x^3 + 3xy^2 - 3x) + i(y^3 + 3x^2y - 3y)$$

risulta essere derivabile in senso complesso. In questi punti è pure analitica? **(3 pt.)**

- (2) Determinare il numero di zeri nel disco unitario della funzione olomorfa

$$f(z) = 31z^8 + 3z^5 + e^{z+5} + 5z^4 + 2. \quad \text{(3pt.)}$$